高数上期中模拟题答案及解析

(编者：越杰 91 徐晨昊)

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 若$a\neq 0, f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{ax}-\cos ax}{3x}, & x>0\\ b, & x=0\\ \dfrac{\tan ax-\sin ax}{x^3}, & x<0\end{cases}$ 有可去间断点$x=0$，则$b\neq$______.

（原创）

答案：

$\pm\dfrac{\sqrt{6}}{9}$.

解析：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-\cos ax}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{3x}-\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-1}{3x}=\frac{a}{3},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax-\sin ax}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax(1-\cos ax)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}=\frac{a^3}{2}$$

由于$x=0$是可去间断点，所以有$\dfrac{a}{3}=\dfrac{a^3}{2}$，解得$a=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，所以$b\neq\pm\dfrac{\sqrt{6}}{9}$.

2. 设$y=x\arctan\dfrac{1}{x}+\ln(e^x+2^{\cos x})$， $\lim\limits_{x\to 0^+}y'=$______.（原创）

答案：

$\dfrac{\pi+1}{2}$.

解析：

$$y'=\frac{x^3}{x^2+1}+\arctan\frac{1}{x}+\frac{e^x-2^{\cos x}(\sin x)\ln 2}{e^x+\cos x},$$

$$\lim_{x\to 0^+} y' = 0 + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\times(1-0) = \frac{\pi+1}{2}.$$

3. 求摆线的参数方程$\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t). \end{cases}$所确定的函数在$t\in(0,2\pi)$上的二阶导数$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$=______.

答案：$-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$.

解析：见《工科数学分析基础（上册）》P116-117.

4. 曲线$f(x) = \frac{x^3+4x^2+2x+1}{x^2+3x+4}$的斜渐近线方程是______.（原创）

答案：

$y = x+1$.

解析：

斜率$k = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1$，截距：$b = \lim_{x\to 0} f(x) - x = \frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+4} = 1$.

5. 极限$\lim_{n->\infty} n[(1+\frac{1}{n})^n - e]$=______.

答案：

$-\frac{e}{2}$.

解析：

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} e\frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} e\frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} e\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} e\frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = -\frac{e}{2}$$

所以$\lim_{n->\infty} n[(1+\frac{1}{n})^n - e] = -\frac{e}{2}$.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 已知$\lim\limits_{x->\infty}(\frac{x^2}{x+1}-ax-b)$=0, 其中$a,b$是常数，则（ ）.

（A）$a=b=1$ （B）$a=-1,b=1$

（C）$a=1,b=-1$ （D）$a=b=-1$

答案：C.

解析：

$$\lim_{x->\infty}(\frac{x^2}{x+1}-ax-b)$$

即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-ax}{x+1}=b$$

要使上式左端极限存在，必然有

$$1-a=0$$

即

$$a=1.$$

此时

$$b=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{1+x}=-1.$$

2. 设$f(x)$，$\varphi(x)$是定义在$[a,b]$上的连续函数，$f(x)$为连续可导函数且$f'(x)>0$，$f(x)$的值域为$[a,b]$，$\varphi(x)$只在$x=x_0\,(x_0\in(a,b))$处不可导且该处的左右导数存在，$f(u_0)=x_0$，则（ ）.(原创)

（A）$\varphi(f(x))$在u_0处可导 （B）$\varphi(f(x))$在u_0处连续但不可导

（C）$\varphi(f(x))$在u_0处有定义但不连续 （D）$\varphi(f(x))$在u_0处无定义

答案：B.

解析：

已知$f(x)$，$\varphi(x)$是定义在$[a,b]$上的连续函数，$x_0\in(a,b)$，$f(x)$的值域为$[a,b]$，所以$\varphi(f(x))$在x_0处连续.

x_0属于$f(x)$的值域，所以令$f(u_0)=x_0$.

因为$f(x)$为连续可导函数且$f'(x)\neq 0$，所以$f(x)$单调.

又因为$x_0 \neq f(a)$且$x_0 \neq f(b)$，所以有$u_0 \neq a$且$u_0 \neq b$，即$u_0 \in (a,b)$.

所以有$\lim\limits_{x \to u_0^+}[\varphi(f(x))]' = \lim\limits_{x \to x_0^+}\varphi'(x)\lim\limits_{x \to u_0^+}f'(x) = f'(u_0)\lim\limits_{x \to x_0^+}\varphi'(x)$.

同理有$\lim\limits_{x \to u_0^-}[\varphi(f(x))]' = \lim\limits_{x \to x_0^-}\varphi'(x)\lim\limits_{x \to u_0^-}f'(x) = f'(u_0)\lim\limits_{x \to x_0^-}\varphi'(x)$.

因为$\lim\limits_{x \to x_0^+}\varphi'(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^-}\varphi'(x)$，所以$\lim\limits_{x \to u_0^+}[\varphi(f(x))]' \neq \lim\limits_{x \to u_0^-}[\varphi(f(x))]'$，

所以$\varphi(f(x))$在x_0不可导.

综上所述，$\varphi(f(x))$在x_0处连续但不可导.

3. 极限$\lim\limits_{x \to +\infty}[(x^3 + \frac{1}{2}x - tan\frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{1+x^6}]$等于（ ）.

（A）1　　（B）0　　（C）e　　(D) $+\infty$

答案：D.

解析：

原式=

$$\lim_{x \to 0^+}\frac{\left(1+\frac{1}{2}t^2 - t^3\tan t\right)e^t - \sqrt{1+t^6}}{t^3}$$

$$= \lim_{x \to 0^+}\frac{\left(1+\frac{1}{2}t^2\right)e^t - 1 + 1 - \sqrt{1+t^6}}{t^3} - \lim_{x \to 0^+}\frac{t^3\tan t e^t}{t^3}$$

$$= \lim_{x \to 0^+}\frac{\left(1+\frac{1}{2}t^2\right)e^t - 1}{t^3} - \lim_{x \to 0^+}\frac{\sqrt{1+t^6} - 1}{t^3}$$

$$= \lim_{x \to 0^+}\frac{\left(1+t+\frac{1}{2}t^2\right)e^t}{3t^2} - \lim_{x \to 0^+}\frac{\frac{1}{2}t^6}{t^3} = +\infty.$$

4. 设函数$f(x)$可导，$F(x) = f(x)(1+|\sin x|)$，若使$F(x)$在$x=0$处可导，则必有（ ）.

（A） $f(0)=0$　　（B） $f'(0)=0$

（C） $f'(0)+f(0)=0$　　（D） $f(0)-f'(0)=0$

答案：A.

解析：

$F(x)$在$x=0$点可导，则$F'_+(0) = F'_-(0)$，

$$F_+'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)\sin x}{x}=f'(0)+f(0),$$

同理 $F_-'(0)=f'(0)-f(0)$.

所以 $f'(0)+f(0)=f'(0)-f(0)$，

即 $f(0)=0$.

5. 设函数 $f(x)$在$x=a$ 处可导，则函数$|f(x)|$在$x=a$ 处不可导的充分必要条件是（ ）.

（A） $f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$　　（B） $f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq0$

（C） $f(a)>0$ 且 $f'(a)<0$　　（D） $f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$

答案：B.

解析：

首先取

$f(x)=x^2, a=0,$ 易知它满足（A），但是$|f(x)|$在a点可导，

排除（A）

取$f(x)=x^2, a=1,$ 易知它满足（C），但$|f(x)|$在a点可导，排除（C）

取$f(x)=-x^2, a=1,$ 易知它满足（D），但$|f(x)|$在a点可导，排除（D）

三、计算题（每小题 7 分，共 35 分）

1. 求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^{\sin x}-\sqrt{\cos x}}{e^{\sin x}-1}\right)^{\frac{1}{x}}$.（原创）

解：

因为

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{e^{\sin x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\left(1+\sqrt{\cos x}\right)(e^{\sin x}-1)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{4}x=0,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{1-\sqrt{\cos x}}{e^{\sin x}-1}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{1-\sqrt{\cos x}}{e^{\sin x}-1}\right)}{\frac{1-\sqrt{\cos x}}{e^{\sin x}-1}}\cdot\frac{\frac{1-\sqrt{\cos x}}{e^{\sin x}-1}}{x}=\frac{1}{4},$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin x}-\sqrt{\cos x}}{e^{\sin x}-1}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1-\sqrt{\cos x}}{e^{\sin x}-1}\right)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{1-\sqrt{\cos x}}{e^{\sin x}-1}\right)}{x}}=e^{\frac{1}{4}}.$$

2. 求曲线$\rho=e^{\theta}$在点$(\rho,\theta)=\left(e^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2}\right)$的切线方程.

解：

曲线$\rho=e^{\theta}$的参数方程为

$$\begin{cases}x=e^{\theta}\cos\theta,\\ y=e^{\theta}\sin\theta.\end{cases}$$

由参数方程求导公式得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{e^{\theta}\sin\theta+e^{\theta}\cos\theta}{e^{\theta}\cos\theta-e^{\theta}\sin\theta},$$

则

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-1.$$

点$(\rho,\theta)=\left(e^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2}\right)$得直角坐标为$\left(0,e^{\frac{\pi}{2}}\right)$，因此，所求切线为

$$x+y=e^{\frac{\pi}{2}}.$$

3. 设$y=\sin^2 3x+\cos\frac{x^2}{5}+\tan\sqrt{x}$，求$y'$.

解：

$$\begin{aligned}y'&=6\sin 3x\cos 3x-\frac{2}{5}x\sin\frac{x^2}{5}+\frac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}\\&=3\sin 6x-\frac{2}{5}x\sin\frac{x^2}{5}+\frac{\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

解：

令$y=(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$,两边取对数，得$\ln y=\dfrac{\ln\cot x}{\ln x}$,

$\lim\limits_{x\to0^+}\ln y$是$\dfrac{\infty}{\infty}$型不定式，用洛必达法则：

$$\lim_{x\to0^+}\ln y=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\cot x}{\ln x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\cot x}\bullet(-\csc x)^2}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-x}{\sin x\cos x}=-1$$

所以$\lim\limits_{x\to0^+}y=\lim\limits_{x\to0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{-1}$

5. 求$f(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{1-x}-\frac{1}{x}}$的间断点并判定间断点的类型.

解：

由分母不为零可知，$x=1,x=\dfrac{1}{2},x=0,x=-1$是$f(x)$的间断点.

（1）$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{(x+1)(2x-1)}=0$，$x=1$为可去间断点.

（2）$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{1-x}{(x+1)(2x-1)}=\infty$，$x=\dfrac{1}{2}$为无穷间断点.

（3）$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-x}{(x+1)(2x-1)}=-1$，$x=0$为可去间断点.

（4）$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1-x}{(x+1)(2x-1)}=\infty$，$x=-1$为无穷间断点.

五、证明题（第 1 题 8 分，第 2 题 14 分，第 3 题 13 分，共 35 分）

1. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$f(a)=f(b)=0$. 试证：对任意非零实数λ，存在$c\in(a,b)$，使$\dfrac{f'(c)}{\lambda}+e^{\lambda c}f(c)=0$.（原创）

证明：

设$g(x)=e^{e^{\lambda x}}f(x)$，则$g(x)$在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$内可导.

因为$f(a)=f(b)=0$，所以$g(a)=g(b)=0$.

根据 Rolle 定理，$\exists c\in(a,b)$使得$g'(c)=0$.

即$e^{e^{\lambda c}}f'(c)+e^{e^{\lambda c}}\cdot e^{\lambda c}\cdot\lambda f(c)=0$.

又因为$\lambda\neq 0$，所以$\dfrac{f'(c)}{\lambda}+e^{\lambda c}f(c)=0$.

命题得证.

2. 设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上二阶可导，且$f(a)-f(b)=g(a)-g(b)$.

试证：(1)（4 分）$\exists\xi\in(a,b)$使得$f'(\xi)=g'(\xi)$.

(2)（10 分）$\exists\lambda_1,\lambda_2\in(a,b),\eta\in(\lambda_1,\lambda_2)$使得

$$\frac{f''(\lambda_1)-g''(\lambda_1)}{(a-\eta)^2}=\frac{f''(\lambda_2)-g''(\lambda_2)}{(b-\eta)^2}.$$（原创）

证明：

(1) $f(a)-f(b)=g(a)-g(b)$即$f(a)-g(a)=f(b)-g(b)$

所以令$h(x)=f(x)-g(x)$，则$h(x)$在在$[a,b]$上二阶可导且

$h(a)=h(b)$.

根据 Rolle 定理，$\exists\xi\in(a,b)$使得$h'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)=g'(\xi).$$

(2) 令η等于（1）中的ξ，则$f'(\eta)=g'(\eta)$.

将（1）中的$h(x)$在$x=\eta$处进行 Taylor 展开得

$$h(x)=h(\eta)+h'(\eta)(x-\eta)+\frac{h''(\lambda)}{2}(x-\eta)^2,$$

其中λ处于x和η之间.

将a,b代入上式得

$$h(a)=h(\eta)+h'(\eta)(a-\eta)+\frac{h''(\lambda_2)}{2}(a-\eta)^2,$$

$$h(b)=h(\eta)+h'(\eta)(b-\eta)+\frac{h''(\lambda_1)}{2}(b-\eta)^2,$$

其中，$\lambda_1\in(\eta,b),\lambda_2\in(a,\eta)$，所以$\eta\in(\lambda_1,\lambda_2)$.

又因为$h(a)=h(b),h'(\eta)=0$,

所以 $\dfrac{h''(\lambda_2)}{2}(a-\eta)^2=\dfrac{h''(\lambda_1)}{2}(b-\eta)^2$, 即

$$\frac{f''(\lambda_1)-g''(\lambda_1)}{(a-\eta)^2}=\frac{f''(\lambda_2)-g''(\lambda_2)}{(b-\eta)^2}.$$

命题得证.

3. 求证：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

证明：

由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，对任意的$\varepsilon>0$，存在正整数$N_1$，当$n>N_1$时，有

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|=\left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|$$

$$\leq\frac{|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}+\frac{|a_{N_1+1}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n},$$

N_1取定后，由于$|a_1-a|,\cdots,|a_{N_1}-a|$是有限个常数，从而，

$|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|$就是一个定数. 因此，存在$N_2>N_1$，当$n>N_2$时，有

$$\frac{|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，当$n>N_2$时，有

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$$